1 Kinematika čestice

1. Čestica se kreće brzinom konstantnog intenziteta v_0 po jednoj od tri koordinatne površi cilindričnog koordinatnog sistema, pri čemu je odnos projekcija brzine (koje se menjaju tokom vremena) konstantan. Naći trejektorije i konačne jednačine kretanja u sva tri slučaja.

2. Čestica se kreće po konusu $\theta = \alpha$ tako da seče sve njegove izvodnice pod uglom γ. Naći trajektoriju, konačne jednačine kretanja i vreme za koje će čestica dospeti do vrha konusa, ako je u početnom trenutku,$t = 0$, $r = r_0$ i $\varphi = 0$. Čestica se kreće ka vrhu konusa brzinom konstantnog intenziteta.

3. Naći jednačinu trajektorije putnika koji se po severnoj polulopti Zemljine kugle kreće uvek prema severoistoku.

4. Kretanje čestice je dato jednačinama

$$\ddot{x} + 2y = -R \sin t, \qquad \ddot{y} - 2x = R \cos t,$$

   gde je R data konstanta. Naći konačne jednačine kretanja, ako je $x = y = 0$ za $t = 0$. Pokazati da se jednačina trajektorije može formulisati kao $\rho^{'} = R|2 \cos \varphi^{'} - 1|$ u polarnim koordinatama koje odgovaraju Dekartovim koordinatama $x^{'} = x + R$, $y^{'} = y$.

5. Čestica se kreće po krugu poluprečnika R, tako da je intenzitet normalnog ubrzanja jednak intenzitetu tangencijalnog ubrzanja. U početnom trenutku, $t = 0$, intenzitet brzine je v_0. Naći zakon promene intenziteta brzine tokom vremena.

6. Kretanje čestice je zadato jednačinama: $\rho = ct$, $\varphi = kt$, $z = 0$, gde su c i k konstante. Naći jednačinu trajektorije, projekcije brzine i ubrzanja čestice, intenzitete brzine i ubrzanja, normalno i tangencijalno ubrzanje.

7. Čestica se kreće u $0xy$ ravni po *logaritamskoj spirali*, $\rho = ce^{2\varphi}$, gde je c pozitivna konstanta. Radijalno ubrzanje čestice je nula. Naći $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\varphi)$, $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$. U početnom trenutku je $\varphi(t = 0) = 0$ i $\dot{\varphi}(t = 0) = \omega_0$.

8. Čestica se kreće po *paraboli* $y = kx^2$ ubrzanjem $\vec{a} = a\vec{e}_y$, $a = const.$ Odrediti a_t, a_n i $v(t)$. U početnom trenutku, $t = 0$, čestica se nalazi u koordinatnom početku, $(x, y) = (0, 0)$.

9. Tačka se kreće u ravni konstantnom sektorskom brzinom po *logaritamskoj spirali* $\rho = ce^{k\varphi}$, gde su c ui k konstante. Pokazati da je brzina čestice obrnuto proporcionalna rastojanju od pola koordinatnog sistema.

10. Tačka se kreće po *kardioidi*, čija je trajektorije $\rho = 2R(1 - \cos \varphi)$, konstantnom sektorskom brzinom v_S. Odrediti brzinu, ubrzanje tačke u funkciji polarnog ugla φ.

11. Tačka se kreće po *lemniskati*, čija je jednačina u polarnim koordinatama $\rho^2 = c^2 \cos(2\varphi)$, gde je c data konstanta, brzinom konstantnog intenziteta v_S. Odrediti brzinu i ubrzanje u tački odredjenoj polarnim uglom φ.

2 Rešavanje jednačina kretanja sistema bez veza

1. Čestica mase m kreće se pravolinijski u sredini čiji je otpor proporcionalan brzini čestice. Odrediti koeficijent proporcionalnosti sile otpora sredine, γ, ako je poznato da se čestica zaustavila nakon što je prešla put s i da joj je intenzitet početne brzine v_0.

2. Čestica mase m bačena je vertikalno naviše u homogenom gravitacionom polju Zemlje, početnom brzinom v_0. Odrediti vreme koje je potrebno čestici da dostigne maksimalnu visinu, ako na česticu deluje i sila otpora proporcionalna brzini čestice.

3. Čestica mase m bačena je sa visine H. Naći trajektoriju čestice ako je njena početna brzina $\vec{\mathbf{v}}(0) = v_0 \vec{\mathbf{e}}_x$, a sila otpora sredine ima oblik $\vec{\mathbf{F}} = -\gamma \vec{\mathbf{v}}$, gde je γ pozitivna konstanta. x-osa je postavljena horizontalno. Smatrati da se promena gravitacionog ubrzanja sa visinom može zanemariti. Ispitati limes $\gamma \to 0$.

4. Ispitati kretanje čestice mase m koja slobodno pada u homogenom gravitacionom polju Zemlje u sredini čiji je otpor proporcionalan kvadratu brzine čestice. Naći graničnu vrednost brzine čestice pri ovim uslovima.

5. Čestica mase m kreće se u homogenom gravitacionom polju Zemlje pri čemu je otpor sredine proporcionalan brzini čestice (konstanta proporcionalnosti je γ). Čestici je saopštena početna brzina intenziteta v_0 pod uglom α u odnosu na podlogu. Odrediti:

   - maksimalnu visinu penjanja čestice i vreme za koje ona tu visinu dostiže;
   - brzinu čestice na maksimalnoj visini;

   Pokazati da domet zadovoljava jednačinu

   $$\left(\frac{\gamma \sin\alpha}{mg\cos\alpha} + \frac{1}{v_0\cos\alpha}\right) D + \frac{m}{\gamma} \ln\left(1 - \frac{\gamma D}{v_0 m \cos\alpha}\right) = 0 \tag{2.1}$$

6. Čestica mase m i naelektrisanja q nalazi se u homogenom gravitacionom polju Zemlje, $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ i njemu ortogonalnom homogenom magnetnom polju B. Čestici je u početnom trenutku saopštena brzina $\vec{\mathbf{v}} = v_0 \vec{\mathbf{e}}_z$. Naći maksimalnu visinu do koje će se popeti čestica.

7. Na česticu mase m deluju privlačne sile iz n nepokretnih centara. Sve sile su proporcionalne rastojanju od odgovarajućeg centra, ali su koeficijenti proporcionalnosti različiti i iznose mk_i za silu iz i-tog centra. Čestica i svi centri su u istoj ravni (Oxy). Zanemarujući uticaj Zemljine teže, naći trajektoriju čestice, ako je u početnom trenutku ona bila u (x_0, y_0) i imala početnu brzinu intenziteta v_0 u pravcu y-ose.

8. Na česticu mase m deluju dve privlačne sile, proporcionalne rastojanju od korespondentnih centara sile; konstanta proporcionalnosti je u oba slučaja km. Prvi centar je nepokretan i nalazi se u koordinatnom početku, dok se drugi kreće po x-osi tako da je $x_2 = 2(a + bt)$. Naći trajektoriju posmatrane čestice, ako je ona u početnom trenutku bila u O_{xy} ravni u tački (a, a) i imala komponente brzine $\dot{x} = \dot{z} = b$, $\dot{y} = 0$.

3 Kretanje sa vezama

1. Čestica mase m kreće se po glatkoj ravni koja rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω oko vertikalne ose. Sastaviti Lagranževe jednačine sa množiteljima veza i naći reakciju veze. U početnom trenutku čestica se nalazila u koordinatnom početku sa brzinom $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_\rho$. Uzeti da je $z-$osa postavljena duž vertikale.

2. Čestica mase m kreće se po glatkom izvrnutom konusu, čija je osa simetrije vertikalno postavljena. Ugao konusa je α. U početnom trenutku čestica je bila na rastojanju $r = a$ od vrha konusa i imala je početnu brzinu $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_\varphi$. Sastaviti jednačine kretanja sa množiteljima veze. Naći reakciju veze.

3. Čestica mase m kreće se po unutrašnjoj površini glatkog vertikalnog cilindra radijusa R u zemljinom gravitacionom polju. Naći silu reakcije koja deluje na česticu. U početnom trenutku brzina čestice $\mathbf{v}_0$ zaklapa ugao α sa horizontalnom ravni.

4 Lagranževe jednačine

1. Dve jednake kuglice masa m povezane su oprugom konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0. Kuglice i opruga se nalaze u cevi koja rotira u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom Ω. Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja.

2. Tanak štap dužine R i zanemarljive mase rotira oko jednog svog kraja u vertikalnoj ravni konstantnom ugaonom brzinom Ω. Za drugi kraj štapa preko konca dužine l i zanemarljive mase, vezana je kuglica mase m. Kuglica se kreće u vertikalnoj ravni. Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja za ovaj mehanički sistem. Gravitacija deluje vertikalno na dole.

3. Čestica mase m kreće se po glatkom prstenu, poluprečnika R, koji rotira oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom Ω u Zemljinom gravitacionom polju. Čestica je spojena oprugom sa vrhom prstena. Konstanta elastičnosti opruge je k, a njena nominalna dužina l_0. Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja ako

   (a) je opruga namotana na prsten;

   (b) opruga nije namotana na prsten.

4. Po površini glatke cilindrične površi radijusa R kreće se čestica mase m. Gravitaciono polje je usmereno duž ose simetrije cilindra. Na česticu deluje i sila otpora $\mathbf{F} = -m\gamma\mathbf{v}$, gde je γ pozitivna konstanta. Sastaviti Lagranževe jednačine kretanja.

5. Na svaku od dve lake neistegljive niti dužine l, okačena je po jedna kuglica mase m. Kuglice su medjusobno povezane oprugom konstante elastičnosti k. Rastojanje izmedju tačaka u kojima su zakačene niti, d, jednako je nominalnoj dužini opruge. Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja.

6. Kotur zanemarljive mase obešen je za horizontalni zid oprugom konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0. Preko kotura je prebačen neistegljivi konac zanemarljive mase, na čijim krajevima vise tegovi masa m_1, odnosno, m_2. Sastaviti lagranžijan sistema, naći jednačine kretanja, kao i ubrzanje kotura i tegova. Sistem se nalazi u gravitacionom polju usmerenom vertikalno na dole.

7. Blok mase M nalazi se na glatkoj strmoj ravni nagibnog ugla α. Blok je spojen oprugom konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0 za vrh strme ravni. Za blok je pomoću neistegljive niti dužine l obešena mala kuglica mase m koja se kreće u vertikalnoj ravni.
   (a) Sastaviti lagranžijan ovog sistema.
   (b) Naći Lagranževe jednačine kretanja.
   (c) Naći normalne frekvence ovog sistema u slučaju malih oscilacija.
8. Za sistem sa slike naći lagranžijan i jednačine kretanja. Mase tela su m_1, m_2 i m_3.
9. Dve čestice masa m_1 i m_2 spojene su neistegljivom niti dužine l i zanemarljive mase. Nit je provučena kroz vrh glatke sfere radijusa R tako da čestica mase m_1 može da se kreće po sferi, a čestica mase m_2 duž vertikalnog pravca.
   (a) Naći jednačine veze i odrediti broj stepeni slobode sistema;
   (b) Sastaviti lagranžijan sistema.
   (c) Odrediti integrale kretanja i na osnovu toga naći jednačine kretanja u kvadraturama.
10. Na horizontalnom stolu nalaze se dva tela masa m_1 i m_2 spojena oprugom konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0. Za telo mase m_1 preko neistegljivog konca obešeno je telo mase m_3 koje se kreće po vertikali. Konac je prebačen preko kotura zanemarljive mase. Gravitacija deluje vertikalno na dole. Sastaviti lagranžijan i naći Lagranževe jednačine kretanja. Trenje je zanemarljivo.
11. Dve male kuglice masa m_1 i m_2 kreću se u vertikalnoj Oxy ravni. Prva kuglica se kreće duž $x-$ose, a druga duž vertikalne $y-$ose. Kuglice su spojene tankim štapom zanemarljive mase i dužine l. Gravitacija je usmerena duž $y-$ose, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$. Napisati jednačine veza i odrediti broj stepeni slobode. Sastaviti lagranžijan i naći Lagranževe jednačine kretanja. Trenje je zanemarljivo.
12. Čestica mase m kreće se po glatkom izvrnutom konusu, čija je osa simetrije vertikalno postavljena. Polu-ugao konusa je α. Sastaviti lagranžijan i naći Lagranževe jednačine kretanja. Naći integrale kretanja i konačnu jednačinu kretanja čestice u integralnom obliku.
13. Čestica mase m, na koju ne deluje nikakva spoljašnja sila, zakačena je na laku neistegljivu nit dužine L, koja je potpuno obmotana oko nepokretnog cilindra radijusa R. U početnom trenutku ($t = 0$) čestici je saopštena brzina intenziteta v_0 u radijalnm pravcu. Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja. Odrediti vreme za koje će se nit sasvim odmotati.

5 Male oscilacije konzervativnih sistema

1. Za jedan kraj opruge konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0 pričvršćena je čestica mase m, dok joj je drugi kraj fiksiran u ravni ortogonalnoj na pravac homogenog gravitacionog polja.
   - Odrediti položaj stabilne ravnoteže čestice;
   - Odrediti normalne frekvence malih oscilacija oko položaja stabilne ravnoteže.
2. Dve čestice masa $2m$ i m spojene su medjusobno oprugom konstante elastičnosti k. Čestica mase $2m$ spojena je oprugom konstante elastičnosti k za horizontalni zid. Obe čestice se kreću duž vertikalnog pravca u (homogenom) gravitacionom polju Zemlje. Nominalna dužina obe opruge je l_0. Naći položaje stabilne ravnoteže i normalne frekvence sistema. Pored toga, odrediti normalne koordinate i formulisati lagranžijan preko normalnih koordinata.

3. Dve čestice jednakih masa, m, spojene su oprugama istih konstanti elastičnosti, k, i istih nominalnih dužina, l_0, madjusobno, a i svaka posebno sa po jednom horizontalnom ravni ("podom" i "plafonom"). Rastojanje izmedju ovih ravni je a. Odrediti normalne frekvence i normalne koordinate ovog sistema i predstaviti lagranžijan preko normalnih koordinata.

4. Tri čestice masa m, $2m$ i m spojene su oprugama (prva sa drugom i druga sa trećom) istih konstanti elastičnosti k i nominalnih dužina l_0. Čestica veće mase se nalazi u sredini. Sistem se nalazi na horizontalnoj idealno glatkoj podlozi i čestice mogu da se kreću duž jedne prave. Odrediti normalne frekvence i normalne koordinate.

5. Dva klatna, oba dužine l, sa jednakim masama m spojena su oprugom konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0. Rastojanje izmedju tačaka u kojima su klatna učvršćena je takodje d. Odrediti frekvence malih oscilacija sistema i naći normalne koordinate.

6. Odrediti normalne frekvence *dvojnog matematičkog klatna* i predstaviti lagranžijan preko normalnih koordinata. Klatna imaju istu dužinu l i masu m.

7. Blok mase M nalazi se na glatkoj strmoj ravni nagibnog ugla α. Blok je spojen oprugom konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0 za vrh strme ravni. Za blok je pomoću neistegljive niti dužine l obešena mala kuglica mase m koja se kreće u vertikalnoj ravni.

   (a) Sastaviti lagranžijan ovog sistema; (uradjeno)

   (b) Naći Lagranževe jednačine kretanja; (uradjeno)

   (c) Naći normalne frekvence ovog sistema u slučaju malih oscilacija.

6 Centralno kretanje

1. Čestica mase m kreće se u polju centralne sile po logaritamskoj spirali, $\rho = ke^{\alpha\varphi}$, gde su k i α konstante. Odrediti silu, potencijal i jednačine kretanja čestice u parametarskom obliku, $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. U početnom trenutku je $\varphi = \varphi_0$. Moment impulsa čestice je L_z.

2. Čestica mase m kreće se u potencijalu

$$U = -U_0\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) ,$$

   gde su U_0 i a pozitivne konstante. Naći jednačinu trajektorije čestice ako je njena energija $E = 0$, a moment impulsa L_z.

3. Čestica mase m nalazi se na rastojanju ρ_0 od centra sile čiji je potencijal

$$U = \frac{\kappa\rho^3}{3} ,$$

   gde je κ pozitivna konstanta. Vektor početne brzine čestice zaklapa ugao $\pi/2$ sa radijus vektorom. Naći vrednost intenziteta početne brzine za koju će se čestica kretati po kružnici.

4. Čestica mase m kreće se u polju odbojne centralne sile

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{ab^2}{\rho^2}(1 + 5e^{-2\varphi}) ,$$

   gde su a i b pozitivne konstante. U početnom trenutku čestica se nalazi na rastojanju $\rho_0 = a$ od centra sile i saopštena joj je početna brzina intenziteta $v_0 = b\sqrt{2}$ u pravcu ortogonalnom na vektor položaja. Odrediti jednačinu trajektorije.

5. Čestica mase m kreće se u polju privlačne centralne sile čiji je intenzitet obrnuto proporcionalan n-tom stepenu $(n > 1)$ rastojanja od nepokretnog centra sile. Koeficijent proporcionalnosti je km. U početnom trenutku čestici je saopštena brzina, ortogonalno na pravac vektora položaja, čiji je intenzitet jednak intenzitetu brzine koju bi čestica imala da je bez početne brzine došla iz beskonačnosti u pretpostavljeni početni položaj. Odrediti vrednost eksponenta n pri kome se, za date početne uslove, čestica kreće po kružnici oko centra sile.

6. Čestica mase m kreće se u polju konzervativne sile tako da intenzitet njene brzine zadovoljava relaciju

$$v = \frac{2S\sqrt{2a}}{\sqrt{\rho^3}} ,$$

gde je S intenzitet sektorske brzine čestice a $2a$ početno rastojanje čestice od centra sile. Odrediti silu koja uzrokuje ovakvo kretanje i jednačinu trajektorije čestice. Pretpostaviti da je $\varphi(t = 0) = 0$.

7. Čestica mase m kreće se po nepokretnom glatkom konusu čija izvodnica zaklapa ugao α sa njegovom osom. Kretanje se odvija pod uticajem odbojne sile intenziteta obrnuto proporcionalnog n-tom stepenu $(n > 0)$ rastojanja od vrha konusa. Odrediti jednačinu trajektorije čestice.

8. Čestica mase m bačena je sa Severnog pola pod uglom α u odnosu na horizontalu. Koliki treba da bude intenzitet početne brzine da bi čestica pala na ekvator? Pretpostaviti da je Zemlja homogena i da ima masu M i radijus R.

7 Kruto telo

1. Tanka homogena ploča mase m ima oblik kvadrata stranice dužine a. Odrediti tenzor inercije ploče u Dekartovom koordinatnom sistemu čiji se početak poklapa sa jednim temenom ploče dok mu se x, y-ose protežu duž ivica ploče. Potom odrediti glavne momente inercije i glavne ose inercije.

2. Tanka homogena ploča mase m ima oblik jednakostraničnog trougla stranice dužine a. Odrediti tenzor inercije ploče u Dekartovom koordinatnom sistemu čiji se početak poklapa sa jednim od temena trougla dok mu se jedna od osa proteže duž ivice trougla. Potom odrediti glavne momente inercije i glavne ose inercije.

3. Odrediti glavne momente inercije i glavne ose inercije homogene kocke mase m i stranice dužine a u Dekartovom koordinatnom sistemu O_{xyz} čiji se koordinatni početak poklapa sa jednim od temena kocke a x, y, z-ose sa ivicama kocke.

4. Odrediti centar mase i glavne momente inercije homogenog polu-cilindra mase m, visine h i poluprečnika osnove R.

5. Odrediti glavne momemte inercije i kinetičku energiju lopte poluprečnika R i ravnomerno raspodeljene mase m, koja rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko jedne od svojih osa simetrije.

6. Odrediti centar mase, glavne momente inercije i kinetičku energiju izvrnute kupe visine h, poluprečnika R i ravnomerno raspodeljene mase m, koja rotira konstantnom ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega}$ oko jedne od osa koje leže u ravni osnove kupe i prolaze kroz središte osnove, u sistemu centra mase.

7. Odrediti centar mase i glavne momente inercije homogenog valjka mase m, visine h i poluprečnika osnove R.

8. Odreiti centar mase i glavne momente inercije homogenog tela mase m ograničenog dvema koaksijalnim cilindričnim površima istih visina h i poluprečnika osnova R_1 i R_2 ($R_1 < R_2$).

9. Kocka stranice a i ravnomerno raspodeljene mase m rotira oko jedne od svojih glavnih dijagonala konstantnom ugaonom brzinom ω. Uz to, kocka se kreće translatorno u pravcu te dijagonale stalnom brzinom v. Odrediti kinetičku energiju kocke.

10. Naći kinetičku energiju cilindra radijusa R koji se kotrlja *bez klizanja* po horizontalnoj ravni, ako je masa cilindra tako raspodeljena da je jedna od njegovih glavnih osa inercije paralelna osi cilindra i nalazi se na rastojanju a od nje i ako je glavni moment inercije oko te glavne ose I.

11. Naći kinetičku energiju homogenog cilindra radijusa a koji se kotrlja *bez klizanja* po cilindričnoj površi radijusa R.

12. Homegena pravougaona ploča mase m, dužine a i širine b rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko jedne dijagonale. Odrediti

    (a) glavne pravce i glavne momente inercije u sistemu čiji je koordinatni početak u centru ploče;

    (b) moment impulsa ploče;

    (c) moment spoljašnjih sila koje deluju na ploču.

13. Kruto telo ima oblik polusfere poluprečnika R i konstantnu gustinu ρ. Telo može da rotira oko jedne osovine koja prolazi kroz središte osnove i zaklapa ugao α sa pravom koja spaja središte osnove i centar mase tela. Telu je saopštena početna kinetička energija T_0 ali, usled trenja u držačima osovine, ono se posle nekog vremena zaustavlja. Pretpostavljajući da je ovo trenje takvo da na telo deluje stalni zakočni moment intenziteta M, izračunati vreme za koje će se ono zaustaviti. Zanemariti uticaj gravitacije.

7.1 Lagranžev metod za kruto telo

14. Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja sistema sa slike; OA i AB su tanki štapovi, oba mase m i dužine L, koji su zglobno spojeni u tački A. Štap OA rotira (O_{xyz} ravni) oko tačke O, dok kraj B štapa AB klizi duž ose O_x. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju koje je usmereno vertikalno naniže.

15. Jedan kraj homogenog štapa mase m i dužine L fiksiran je na horizontalnoj podlozi dok je drugi povezan sa vertikalnim zidom elastičnom oprugom zanemarljive mase, konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0. Kada je štap u vertikalnom položaju (paralelan vertikalnom zidu) opruga je neistegnuta. Štap može da rotira u vertikalnoj ravni oko ose koja prolazi kroz fiksirani kraj štapa. Naći frekvencu malih oscilacija štapa. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže.

16. Homogeni štap mase m i dužine L fiksiran je jednim svojim krajem za obod točka radijusa R koji rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω u verikalnoj ravni (O_{xy} ravni) oko ose koja prolazi kroz njegovo središte, u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže. Štap može da rotira u verikalnoj ravni oko ose koja prolazi kroz fiksirani kraj štapa. Naći frekvencu malih oscilacija štapa ako je $R\Omega^2 \gg g$ (sporo obrtanje točka).

17. Naći lagranžijan i Lagranževe jedančine kretanja homogene kupe mase m i visine h vcija se baza, radijusa R, kotrlja *bez klizanja* po glatkoj ravnoj horizontalnoj podlozi, dok joj je vrh fiksiran u jednoj tački podloge (u koordinatnom početku). Ugao izmedju ose kupe i ma koje od njenih izvodnica je α. Telo se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže.

18. Naći lagranžijan i Lagranževe jedančine kretanja homogene kupe mase m i visine h čija se baza kotrlja *bez klizanja* po glatkoj ravnoj horizontalnoj podlozi, dok joj je vrh fiksiran u tački koja se nalazi iznad podloge na visini jednakoj radijusu baze R (tako da je osa kupe paralelna podlozi). Ugao izmedju ose kupe i ma koje od njenih izvodnica je α. Telo se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže.

19. Glatka prizma mase m, visine h i nagibnog ugla α može slobodno da klizi po glatkoj horizontalnoj podlozi duž jednog pravca (x-ose). Tanki homogeni disk mase M i radijusa R nalazi se na vrhu prizme (na visini h) i iz mirovanje počinje da se kotrlja niz strmu ravan prizme *bez klizanja*. Naći ubrzanje prizme. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže.

8 Hamiltonove kanonske jednačine

1. Odrediti kanonske jednačine kretanja sistema sa dva stepena slobode čiji je lagranžijan:

$$L = \frac{a}{b^2 \sin^2 q_2}\dot{q}_1^2 + (c^2 + b^2 \cos^2 q_1)\dot{q}_2^2, \tag{8.2}$$

gde su q_1 i q_2 nezavisne generalisane koordinate, a a, b i c konstante.

2. Čestica mase m može da klizi bez trenja po tankom homogenom prstenu, mase $M = 2m$ i poluprečnika R, koji može da rotira oko osovine koja se poklapa sa vertikalnom osom simetrije prstena. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže. Odrediti kanonske jednačine kretanja.

3. Tanki homogeni štap mase M i dužine L pričvršćen je jednim svojim krajem za horizontalni zid u tački O i može da rotira u vertikalnoj ravni. Oko štapa je obmotana elastična opruga, konstante elastičnosti k, nominalne dužine l_0 i zanemarljive mase, koja je jednim svojim krajem pričvršćena u tački O, dok je drugim spojena sa česticom mase m koja može da se kreće duž štapa bez trenja. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže. Odrediti kanonske jednačine kretanja.

4. Tanki homogeni štap mase M i dužine L rotira bez trenja u horizontalnoj ravni oko verikalne osovine koja seče ovu ravan u tački O. Oko štapa je obmotana elastična opruga, konstante elastičnosti k, nominalne dužine l_0 i zanemarljive mase, koja je jednim svojim krajem pričvršćena u tački O, dok je drugim spojena sa česticom mase m koja može da se kreće duž štapa bez trenja. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže. Odrediti kanonske jednačine kretanja.

5. Čestica mase m može da se kreće bez trenja po tankom štapu u obliku parabole (s otvorom na gore), zanemarljive mase, koji rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko svoje vertikalne ose simetrije. Jednačina parabole je $\rho^2 = 2az$, $a > 0$. Čestica je spojena sa oprugom, konstante elastičnosti k, nominalne dužine l_0 i zanemarljive mase, koja je svojim drugim krajem pričvršćena u tački na osi rotacije koja se nalazi na visini $h = a/2$ iznad temena parabole. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže. Odrediti kanonske jednačine kretanja.

6. Čestica mase m kreće se pod uticajem dva nepokretna centra sile. Obe sile su privlačne i proporcionalne rastojanju od odgovarajućeg centra, pri čemu su koeficijenti proporcionalnosti k_1 i k_2, respektivno. Rastojanje izmedju centara je $2a$ (oba leže na x-osi, dok je koordinatni početak u sredini izmedju njih). Odrediti kanonske jednačine kretanja čestice i njihovom integracijom doći do konačnih jednačina kretanja, ako su početni uslovi: $x_0 = b$, $y_0 = 0$, $z_0 = c$; $\dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$.

7. Čestica mase m kreće se po zavojnici čije su parametarske jednačine:

$$x = a\cos(\varphi); \quad y = a\sin(\varphi); \quad z = b\varphi, \tag{8.3}$$

gde su a i b date konstante. Jedna tačka na osi simetrije zavojnice je izvor privlačne sile proporcionalne rastojanju od centra (koeficijent proporcionalnosti je k). U početnom trenutku, čestica se nalazi na visini h iznad centra sile i nema brzinu. Odrediti kanonske jednačine kretanja, ako na česticu, pored sile izvora, deluje i gravitaciona sila usmerana vertikalno naniže.

8. Izračunati Poasonovu zagradu $\{|\mathbf{p}|, H\}$ za *sferno klatno* (čestica mase m koja se kreće po sferi radijusa R u homogenom gravitacionom polju).

9. Date su kanonske jednačine kretanja sistema sa dva stepena slobode,

$$\dot{q}_1 = p_1 + p_2 q_2; \quad \dot{q}_2 = p_1 q_2 \frac{p_2}{q_1^2}; \tag{8.4}$$

$$\dot{p}_1 = \frac{p_2^2}{q_1^3}; \quad \dot{p}_2 = -p_1 p_2. \tag{8.5}$$

Odrediti hamiltonijan sistema i ispitati da li je veličina,

$$F = \frac{p_2}{q_1} + p_1 q_2^2, \tag{8.6}$$

integral kretanja.

10. Čestica mase m može da klizi bez trenja po tankom homogenom prstenu mase $2m$ i radijusa R, koji rotira oko osovine koja se poklapa sa njegovom vertikalnom osom rotacije, u homogenom gravitacionom polju. Ispitati da li su veličina,

$$F = p_\varphi^2 \sin^2\theta + p_\theta^2 (1 + \sin^2\theta), \tag{8.7}$$

i hamiltonijan sistema integrali kretanja.

9 Specijalna teorija relativnosti

1. Tanak štap se kreće kolinearno konstantnom brzinom u u inercijalnom referentnom sistemu S i pritom prolazi pored fiksiranog markera A. Vreme potrebno štapu da prodje pored markera, u sistemu S, je $\triangle t = 8$ns, a u referentnom sistemu S' vezanom za štap, $\triangle t' = 10$ns. Kolika je *sopstvena dužina* štapa?

2. Raketa se udaljava od Zemlje brzinom $v = 4c/5$. Sa rakete se emituju dva svetlosna signala prema Zemlji. U referentnom sistemu S' vezanom za raketu, vremenski interval izmedju ova dva dogadjaja je $\triangle t' = 5s$. Koliki je vremenski interval izmedju prijema ova dva svetlosna signala u referentnom sistemu S vezanom za Zemlju?

3. Dve čestice se kreću u inercijalnom referentnom sistemu S, jedna duž $x-$ose, a druga duž $y-$ose. Brzina prve čestice je $v_1 = 0,8c$, a druge $v_2 = 0,6c$. Kolika je brzina jedne čestice u referentnom sistemu vezanom za drugu česticu?

4. Platforma sopstvene dužine l_0 kreće se brzinom u u odnosu na Zemlju. Sa zadnjeg kraja platforme ispali se metak brzinom v' u odnosu na platformu, u smeru kretanja platforme. Odrediti dužinu puta koji metak predje dok ne dosegne prednji kraj platforme, u referentnom sistemu vezanom za Zemlju. Uticaj Zemljine gravitacije na kretanje metka zanemariti.

5. Štap sopstvene dužine l_0 zaklapa ugao α' sa x' osom referentnog sistema S' u kome štap miruje. U inercijalnom referentnom sistemu S, štap se kreće duž x-ose koja se poklapa sa x'-osom.
a) Kolika je dužina štapa u sistemu S i koliki ugao zaklapa sa $x-$osom.
b) Posmatrač iz sistema S fotografiše štap. Foto-ploča je postavljena duž x ose. Svetlosni zraci padaju na ploču paralelno y-osi. Kolika je dužina štapa na fotografiji?

6. U inercijalnom referentnom sistemu S, dva fotona kreću se u pozitivnom smeru x-ose i nalaze se na medjusobnom rastojanju L. Odrediti rastojanje izmedju ova dva fotona u inercijalnom referentnom sistemu $S^{'}$ koji se, u odnosu na S, kreće brzinom v u smeru kretanja fotona.

7. Pokazati da je $\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\mu}$ Lorencov skalar.

8. Izračunati:

   (a) $\frac{\partial}{\partial x^\rho}\Big(x^\mu x_\mu\Big)$;

   (b) $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$;

   (c) $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu}p_\nu$.

9. Dat je vektor $A^\mu = (1,-1,2,3)^T$. Naći $A^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$. Odrediti kovarijantne komponente vektora, A_μ. Da li je vektor A^μ prostornog, vremenskog ili svetlosnog tipa?

10. Čestica se kreće po zakonu

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos(\omega t)\\
y &= R\sin(\omega t)\\
x &= ut
\end{aligned}
$$

gde su R, ω i u konstante. Odrediti četvorobrzinu i četvoroubrzanje čestice. Izračunati $U_\mu U^\mu$ i $\mathcal{A}^\mu\mathcal{A}_\mu$ i $\mathcal{A}^\mu U_\mu$.

11. Elektron ima energiju mirovanja $mc^2 = 0,51\text{MeV}$ i kinetičku energiju $T = 10\text{MeV}$. Odrediti impuls elektrona.

12. Čestica mase m i kinetičke energije T_0 elastično se rasejava na čestici iste mase koja miruje. Ako se upadna čestica raseje pod uglom θ_1, naći njenu kinetičku energiju posle rasejanja.

13. U sudaru protona sa drugim protonom koji miruje, nastataju tri protona i jedan antiproton. Energije mirovanja protona i antiprotona su jednake i iznose 938MeV. Odrediti minimalnu kinetičku energiju upadnog protona, da bi došlo do ove reakcije.

14. Četvoroimpuls čestice je P^μ. Pokazati da je energija slobodne čestice za posmatrača čija je četvorobrzina U^μ data sa $E = U_\mu P^\mu$.

15. Pion se kreće brzinom v i raspada se na mion i antimionski neutrino, $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Antineutrino se kreće pod uglom od 90^0 u odnosu na pravac kretanja piona. Naći ugao koji impuls miona zaklapa sa pravcem piona. Masa piona je $m_\pi = 138$MeV, miona 105MeV, dok je neutrino bezmasena čestica (preciznije skoro bezmasen).

16. Dve čestice masa m elastično se sudaraju. Naći ugao izmedju čestica posle rasejanja u laboratorijskom sistemu. Uzeti da jedna čestica pre sudara miruje. Rezultat izraziti preko energija rasejanih čestica, $\mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2'$.